

- نقول إن الحدثين A و B غير منسجمين إذا كان فقط إذا كان $A \cap B = \emptyset$.

(II) الفضاءات الاحتمالية المنتهية:

1- مثال:

نرمي نردا مكعبا وجوهه الستة مرقمة من 1 إلى 6.
كون الإمكانات: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- لدينا حظ واحد على 6 للحصول على الرقم 1.

نقول إن احتمال الحصول على 1 هو $\frac{1}{6}$ أو احتمال الحدث A

"الحصول على 1" هو $p(A) = \frac{1}{6}$

- احتمال الاحداث الابتدائية هو:

$$i \in \{1, 2, 3, \dots, 6\}; p(\{i\}) = \frac{1}{6}$$

2- تعريف:

نعتبر المجموعة: $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (كون الإمكانات)
نقول إننا قد عرفنا احتمالا p على Ω إذا ربطنا كل عنصر

$$a_i \text{ بعدد حقيقي } p_i \text{ بحيث } 0 \leq p_i \leq 1 \text{ و } \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

ونكتب: $p(a_i) = p(\{a_i\}) = p_i$

- الزوج (Ω, p) يسمى فضاء احتماليا منتهيا.

3- احتمال حدث:

ليكن (Ω, p) فضاء احتماليا منتهيا وليكن A حدثا.
احتمال الحدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي تكونه.

يعني: إذا كان: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$\text{فان: } p(A) = p(a_1) + p(a_2) + \dots + p(a_n)$$

ملاحظة:

ليكن (Ω, p) فضاء احتماليا منتهيا.

1- ليكن A حدثا. لدينا $0 \leq p(A) \leq 1$.

$$2- p(\emptyset) = 0$$

$$3- p(\Omega) = 1$$

أمثلة:

مثال 1: نعتبر $\Omega = \{P, F\}$

- نعتبر الاحتمال p_1 المعروف بما يلي:

$$p_1(P) = \frac{1}{2}, p_1(F) = \frac{1}{2}$$

- نعتبر الاحتمال p_2 المعروف بما يلي:

$$p_2(P) = \frac{2}{3}, p_2(F) = \frac{1}{3}$$

(I) الوضعيات العشوائية:

1- تعريف:

- إذا رمينا قطعة نقود في الهواء فإننا لا نعلم مسبقا هل ستعین وجها أم ظهرها.
- إذا رمينا نردا مكعبا فإننا لا نعلم مسبقا الرقم الذي سيعينه.
- إن مثل هذه الوضعيات تسمى وضعيات عشوائية.

2- أمثلة:

مثال (1):

نرمي قطعة نقود في الفضاء. هناك حالتان: إما أن نحصل على P أو F .

المجموعة: $\Omega = \{P, F\}$ المكونة من جميع الإمكانات تسمى كون الإمكانات. وكل عنصر من Ω يسمى إمكانية.

مثال (2):

صندوق يحتوي على 4 كرات تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4 نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق.

- ليكن Ω كون الإمكانات:

لتكن $U = \{1, 2, 3, 4\}$ المجموعة المكونة من الكرات.

كل إمكانية هي عبارة عن تأليفة لعنصرين من بين 4 عناصر المجموعة U . إذن:

$$\text{card } \Omega = C_4^2 = \frac{4.3}{2.1} = 6$$

ولدينا:

$$\Omega = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$$

الإمكانية $\{2, 3\}$ تحقق الحدث: "الحصول على كرتين مجموعهما يساوي 5".

والإمكانية $\{1, 4\}$ كذلك.

المجموعة: $A = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ تسمى حدثا.

ونقول: ليكن A الحدث: "الحصول على مجموع يساوي 5".

3- مصطلحات:

نربط كل وضعية عشوائية بالمجموعة Ω المكونة من جميع الحالات الممكنة.

1- Ω تسمى كون الإمكانات.

2- كل عنصر من Ω يسمى إمكانية.

3- كل جزء A من Ω يسمى حدثا. وبالتالي ستكون $P(\Omega)$ هي مجموعة الأحداث.

4- الحدث $\emptyset$ يسمى الحدث المستحيل.

5- الحدث Ω يسمى الحدث الأكيد.

6- الأحداث المكونة من إمكانية تسمى الأحداث الابتدائية.

7- ليكن A و B حدثين

- الحدث $A \cap B$ يسمى الحدث A و B .

- الحدث $A \cup B$ يسمى الحدث A أو B .

تمرين:

نرمي نردا وجوهه مرقمة من 1 إلى 6 ومغشوش.
بحيث الوجوه التي تحمل رقما زوجيا لها نفس الاحتمال.
والوجوه التي تحمل رقما فرديا لها نفس الاحتمال.
واحتمال الحصول على رقم زوجي يضاعف احتمال الحصول على رقم فردي.

- 1- احسب احتمال الحصول على رقم زوجي.
- 2- احسب احتمال الحصول على مضاعف ل 3.
- 3- احسب احتمال الحصول على رقم فردي.

ليكن Ω كون الإمكانات: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
لنحسب احتمال الأحداث الابتدائية.

$$\text{لدينا } p(2) = p(4) = p(6) = x$$

$$\text{و } p(1) = p(3) = p(5) = y$$

$$\text{ولدينا: } x = 2y$$

ونعلم أن:

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$$

$$\text{يعني } 3y + 3x = 1$$

$$\text{يعني } 3y + 6y = 1$$

$$9y = 1$$

$$\text{إذن } x = \frac{2}{9} \text{ و } y = \frac{1}{9}$$

$$\text{إذن: } p(1) = p(3) = p(5) = \frac{1}{9}$$

$$p(2) = p(4) = p(6) = \frac{2}{9}$$

1- ليكن A الحدث " الحصول على رقم زوجي ".

$$\text{لدينا: } A = \{2, 4, 6\}$$

$$\text{إذن } p(A) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

2- ليكن B الحدث " الحصول على مضاعف ل 3 ".

$$\text{لدينا } B = \{3, 6\}$$

$$\text{إذن } p(B) = p(3) + p(6) = \frac{1}{3}$$

3- ليكن C الحدث " الحصول على رقم فردي ".

$$\text{لدينا } C = \{1, 3, 5\}$$

$$\text{إذن: } p(C) = p(1) + p(3) + p(5) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

4- خاصيات:

ليكن (Ω, p) فضاء احتمالي منتهيا.

خاصية (1):

ليكن A و B حدثين بحيث $A \cap B = \emptyset$

$$\text{لدينا: } p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

برهان:

$$\text{نضع } A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$\text{و } B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

لدينا: $A \cap B = \emptyset$ إذن $a_i \neq b_j$

$$\text{إذن: } A \cup B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

إذن

$$p(A \cup B) = p(a_1) + \dots + p(a_n) + p(b_1) + \dots + p(b_n) \\ = p(A) + p(B)$$

ملاحظة:

- لتكن $A_1, A_2, \dots, A_n$ أحداثا منفصلة متتالية.

$$\text{يعني: } \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$\text{لدينا: } p\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n p(A_i)$$

خاصية (2):

ليكن A و B حدثين.

$$\text{لدينا } p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

برهان:

$$\text{لدينا } A \cup B = A \cup (B - A)$$

$$\text{ولدينا } A \cap (B - A) = \emptyset$$

$$\text{إذن: } p(A \cup B) = p(A \cup (B - A))$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B - A)$$

ولدينا:

$$B = (A \cap B) \cup (B - A)$$

$$\text{و } (A \cap B) \cap (B - A) = \emptyset$$

$$\text{إذن } p(B) = p((A \cap B) \cup (B - A))$$

$$= p(A \cap B) + p(B - A)$$

$$\text{إذن } p(B - A) = p(B) - p(A \cap B)$$

$$\text{ومنه: } p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

خاصية (3):

ليكن A حدثا. و $\bar{A}$ الحدث المضاد ل A .

$$\text{لدينا: } p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

برهان:

$$\text{لدينا } A \cup \bar{A} = \Omega \text{ و } A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\text{إذن } p(A \cup \bar{A}) = p(\Omega)$$

$$\text{يعني } p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

$$\text{إذن } p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

خاصية (4):

ليكن A و B حدثين.

$$\text{إذا كان } A \subset B \text{ فإن } p(A) \leq p(B)$$

5- فرضية تساوي الاحتمالات:

(a) تعريف:

ليكن (Ω, p) فضاء احتمالي منتهيا.

نقول إن هذا الفضاء يحقق فرضية تساوي الاحتمالات إذا وفقط إذا كان لكل الإمكانات نفس الاحتمال.

ليكن (Ω, p) فضاء احتمالي يحقق فرضية تساوي الاحتمالات

(* نضع: $Card\Omega = n; \Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

لنحسب احتمال الأحداث الابتدائية:

لدينا: $p(a_1) = p(a_2) = \dots = p(a_n) = x$

ولدينا: $p(a_1) + p(a_2) + \dots + p(a_n) = 1$

يعني: $\underbrace{x + x + \dots + x}_{n \text{ مرة}} = 1$

يعني $nx = 1$

يعني $x = \frac{1}{n}$

أي $x = \frac{1}{Card\Omega}$

إذن: $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad p(a_i) = \frac{1}{Card\Omega}$

(* ليكن A حدثا بحيث $CardA = q$

لدينا A يحتوي على q إمكانية. ولدينا $p(A)$ هو مجموع احتمالات هذه الإمكانيات.

وهذه الإمكانيات لها نفس الاحتمال $\frac{1}{n}$

إذن $p(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{q \text{ مرة}}$

إذن $p(A) = q \cdot \frac{1}{n}$

$p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega}$

خاصية:

ليكن (Ω, p) فضاء احتمالي منتهيا يحقق فرضية تساوي الاحتمالات.

(* احتمال الأحداث الابتدائية هو $\frac{1}{Card\Omega}$

(* إذا كان A حدثا فإن: $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega}$

ملاحظة:

(* عناصر Ω تسمى الحالات الممكنة.

(* عناصر A تسمى الحالات المرغوب فيها.

$p(a) = \frac{\text{عدد الحالات المرغوب فيها}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

(* إن فرضية تساوي الاحتمالات يمكن أن تظهر في النص بعبارة صحيحة أو بطريقة غير مباشرة. مثلا: نرمي نرد

مغشوش صندوق يحتوي على كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس...

تمارين تطبيقية:

تمرين 1

صندوق يحتوي على 5 بيضاء تحمل الأرقام 1, 2, 3, 4, 5 و 3 كرات سوداء تحمل الأرقام 1, 2, 3.

وكرتان حمراوان تحملان الرقم 1, 2.

نسحب تانبا وعشوائيا 3 كرات من الصندوق (الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس).

احسب احتمال الحصول على:

(1) 3 كرات بيضاء.

(2) 3 كرات من نفس اللون.

(3) كرة واحدة بالضبط تحمل رقما فرديا.

(4) كرة واحدة على الأقل تحمل رقما زوجيا.

(5) كرة واحدة على الأكثر بيضاء.

(6) 3 كرات تحمل أرقاما مجموعها زوجي.

(7) 3 كرات من نفس اللون وتحمل أرقاما مجموعها فردي.

(8) 3 كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى.

(9) لونين بالضبط.

ليكن Ω كون الإمكانيات.

كل إمكانية هي عبارة عن تاليفة ل 3 عناصر من بين 10 عناصر المجموعة U :

$U = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, N_1, N_2, N_3, R_1, R_2\}$

إذن: $Card\Omega = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$

(1) ليكن A الحدث: "الحصول على 3 كرات بيضاء".

كل إمكانية من A هي عبارة عن تاليفة ل 3 عناصر من بين عناصر المجموعة: $\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$

إذن: $CardA = C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 10$

إذن: $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$

(2) ليكن B الحدث: "الحصول على 3 كرات من نفس اللون"

"الحدث B يعني الحصول على $3B$ أو $3N$ "

إذن $CardB = C_5^3 + C_3^3 = 10 + 1 = 11$

إذن $p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{11}{120}$

(3) ليكن C الحدث: "كرة واحدة بالضبط تحمل رقما فرديا"

الحدث C يعني الحصول على $3I$ و $2P$

إذن:

$CardC = C_6^1 \cdot C_4^2 = 6 \cdot 6 = 36$

إذن:

$p(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$

(4) ليكن D الحدث: "كرة واحدة على الأقل تحمل رقما زوجيا"

تمرين (2):

نرمي نردتين وجوه كل واحد مرقمة من 1 إلى 6 وغير مغشوشين.

احسب احتمال الحصول على:

(1) رقمين متساويين.

(2) رقمين مختلفين.

(3) رقمين مجموعهما زوجي.

(4) رقمين مجموعهما أصغر أو يساوي 6.

نرمز لكل إمكانية ب (x, y) حيث x الرقم الذي عينه الفرد الأول و y الرقم الذي عينه الفرد الثاني. ليكن Ω كون الإمكانات. كل إمكانية هي عبارة عن ترتيبية بتكرار لعنصرين من بين 6 عناصر E : $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\text{Card}\Omega = 6^2 = 36 \quad \text{إذن:}$$

(1) ليكن A الحدث "الحصول على رقمين متساويين".

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$\text{Card}A = 6 \quad \text{إذن}$$

$$p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{ومنه:}$$

(2) ليكن B الحدث "الحصول على رقمين مختلفين".

ليكن $\bar{B}$ الحدث المضاد ل B

$$p(\bar{B}) = p(A) \quad \text{لدينا } \bar{B} = A$$

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) \\ = 1 - p(A)$$

$$p(B) = 1 - p(A) = \frac{5}{6}$$

(3) ليكن C الحدث "الحصول على رقمين مجموعهما زوجي".

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$\text{Card}C = 18 \quad \text{من خلال الجدول لدينا}$$

$$p(C) = \frac{\text{Card}C}{\text{Card}\Omega} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad \text{إذن:}$$

(4) ليكن D الحدث "الحصول على رقمين مجموعهما أصغر أو يساوي 6"

$$\text{Card}D = 15 \quad \text{من خلال الجدول لدينا:}$$

$$p(D) = \frac{\text{Card}D}{\text{Card}\Omega} = \frac{15}{36}$$

الحدث D يعني الحصول على: $(1I ; 2P)$ أو $(2I ; 1P)$ أو $3P$.

$$\text{Card}D = C_4^2 \cdot C_6^1 + C_4^1 \cdot C_6^2 + C_4^3 \\ = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 6 + 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} + 4 \quad \text{إذن}$$

$$\text{Card}D = 100$$

$$p(D) = \frac{\text{Card}D}{\text{Card}\Omega} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6} \quad \text{إذن}$$

طريقة 2: ليكن $\bar{D}$ الحدث المضاد ل D

الحدث $\bar{D}$ يعني الحصول على $3I$

$$\text{Card}\bar{D} = C_6^3 = 20$$

$$p(\bar{D}) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \quad \text{إذن:}$$

$$p(D) = 1 - p(\bar{D}) = \frac{5}{6} \quad \text{إذن}$$

(5) ليكن E الحدث "كرة واحدة على الأكثر بيضاء"

الحدث E يعني الحصول $(1B ; 2\bar{B})$ أو $3\bar{B}$

$$\text{Card}E = C_5^1 \cdot C_5^2 + C_5^3 \\ = 5 \cdot 10 + 10 = 60 \quad \text{إذن:}$$

$$p(E) = \frac{\text{Card}E}{\text{Card}\Omega} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} \quad \text{إذن}$$

(6) ليكن F الحدث "3 كرات تحمل أرقاماً مجموعها زوجي"

الحدث F يعني الحصول على $3P$ أو $(1P ; 1B_I)$

$$p(F) = \frac{\text{Card}F}{\text{Card}\Omega} = \frac{64}{120} = \frac{8}{15} \quad \text{إذن}$$

(7) ليكن G الحدث "3 كرات من نفس اللون أرقامها مجموعها فردي"

الحدث G يعني الحصول على $3B_I$ أو $(2B_P ; 1B_I)$

$$\text{Card}G = C_3^3 + C_3^1 \cdot C_2^2 = 4 \quad \text{إذن:}$$

$$p(G) = \frac{\text{Card}G}{\text{Card}\Omega} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30} \quad \text{إذن}$$

(8) ليكن H الحدث "3 كرات مختلفة الألوان متتى متتى".

الحدث H يعني الحصول على $\{1R, 1N, 1B\}$

$$\text{Card}H = C_5^1 + C_3^1 \cdot C_2^1 = 30 \quad \text{إذن:}$$

$$p(H) = \frac{\text{Card}H}{\text{Card}\Omega} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} \quad \text{إذن:}$$

(9) ليكن J الحدث "الحصول على لونين بالضبط"

الحدث J يعني $\{2B ; 1\bar{B}\}$ أو $\{2N ; 1\bar{N}\}$ أو $\{2R ; 1\bar{R}\}$

$$\text{Card}J = C_5^2 \cdot C_5^1 + C_3^2 \cdot C_7^1 + C_2^2 \cdot C_8^1 = 79 \quad \text{إذن:}$$

$$p(J) = \frac{\text{Card}J}{\text{Card}\Omega} = \frac{79}{120} \quad \text{إذن:}$$

III - الاحتمال الشرطي:

(1) مثال:

نرمي نردين غير مغشوشين: A و B . وجوه كل واحد منهما مرقمة من 1 إلى 6.

ليكن Ω كون الإمكانات.

لدينا: $\Omega = E \times E / E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$Card\Omega = 36$$

ليكن B الحدث: "الحصول على مجموع أكبر أو يساوي 10"

لدينا: $B = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$$p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

نفترض أننا قد علمنا أن النرد A قد عين الرقم 6. أمام هذا الخبر تصبح الحالات الممكنة:

$$\{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

والحالات المرغوب فيها:

$$\{(6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

إذن احتمال B يصبح:

$$p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

هذا الاحتمال يسمى احتمال الحدث B علما أن الحدث A قد تحقق حيث A هو الحدث "النرد A عين رقم 6".

ونرمز له بـ $p(B/A)$ أو $P_1(B)$

$$P_1(B) = \frac{1}{2} \quad \text{إذن}$$

ملاحظة:

$$p(B/A) = \frac{3}{6} = \frac{3/36}{6/36}$$

$$= \frac{\frac{Card(A \cap B)}{Card\Omega}}{\frac{CardA}{Card\Omega}} = \frac{P(A \cap B)}{p(A)}$$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \quad \text{إذن}$$

(2) تعريف:

ليكن (Ω, p) فضاء احتماليا منتهيا.

ليكن A و B حدثين بحيث $A \neq B$

نسمي احتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق العدد الذي نرمز له بـ $p(B/A)$ أو $p_A(B)$ والمعروف بما يلي:

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

ملاحظة:

إذا كانت لدينا فرضية تساوي الاحتمالات فإن:

$$p(B/A) = \frac{Card(A \cap B)}{CardA}$$

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

صندوق يحتوي على 6 كرات حمراء تحمل الأرقام 0, 0, 1, 1, 1, 1 و 8 كرات بيضاء: 0, 0, 0, 1, 1, 1.

نسحب تائيا كرتين من الصندوق

(1) إذا كانت الكرتان المسحوبتان تحملان الرقم 1، فما هو الاحتمال لكي تكونا بيضاوين؟

(2) احسب احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس اللون علما أنهما تحملان الرقم 1.

ليكن Ω كون الإمكانات. لدينا:

$$Card\Omega = C_{14}^2 = \frac{14 \times 13}{2} = 91$$

(1) ليكن A الحدث "الحصول على كرتين تحملان الرقم 1" وليكن B الحدث "الحصول على كرتين بيضاوين".

الاحتمال المطلوب هو $p(B/A)$

$$p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} \quad \text{لدينا:}$$

$$CardA = C_9^2 = 36 \quad \text{ولدينا}$$

$$p(A) = \frac{36}{91} \quad \text{إذن:}$$

الحدث $A \cap B$ يعني الحصول على $2B$ وتحملان الرقم 1.

$$Card(A \cap B) = C_5^2 = 10 \quad \text{إذن}$$

$$p(A \cap B) = \frac{10}{91} \quad \text{إذن}$$

$$p(B/A) = \frac{\frac{10}{91}}{\frac{36}{91}} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \quad \text{ومنه:}$$

$$p(B/A) = \frac{5}{18}$$

(2) ليكن C الحدث "الحصول على كرتين من نفس اللون"

الاحتمال المطلوب هو $p(C/A)$

$$p(C/A) = \frac{p(A \cap C)}{p(A)}$$

$$p(A) = \frac{36}{91} \quad \text{لدينا}$$

الحدث $A \cap C$ يعني الحصول على كرتين من نفس اللون وتحملان الرقم 1. يعني الحصول على $2B_1$ أو $2R_1$

$$Card(A \cap C) = C_5^2 + C_4^2 = 10 + 6 = 16 \quad \text{إذن:}$$

$$p(A \cap C) = \frac{16}{91} \quad \text{إذن}$$

ملاحظة:

إذا كان $p(B) \neq 0$ فإن: $p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$
تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

صندوقان U_1 و U_2 بحيث U_1 يحتوي على $4B$ و $3R$ ،
و U_2 يحتوي على $2B$ و $5R$.
نسحب كرتين في آن واحد من U_1 نضعهما في U_2 ثم
نسحب كرتين تأنيا من U_2 .
(1) احسب احتمال الحصول على 4 كرات بيضاء.
(2) احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل.
(3) احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء بالضبط.

(1) ليكن A الحدث "الحصول على $2B$ في السحبة الأولى"
وليكن B الحدث "الحصول على $2B$ في السحبة الثانية".
الاحتمال المطلوب هو $p(A \cap B)$

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$$

$$p(A) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7} \quad \text{لدينا:}$$

$$p(B/A) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{1}{6} \quad \text{و}$$

$$p(A \cap B) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{42} = \frac{1}{21} \quad \text{إذن:}$$

ملاحظة:

يمكن تطبيق صيغة الاحتمالات المركبة بطريقة غير مباشرة
بدون إبراز الحدث A و B ... كما يلي:
(1) ليكن A الحدث "الحصول على $4B$ ".
نرمز لكل إمكانية ب (x, y) حيث x نتيجة السحبة (1) و y
نتيجة السحبة الثانية.

الحدث A يعني الحصول على $(2B, 2B)$

$$p(A) = \frac{C_4^2}{C_7^2} \cdot \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21} \quad \text{إذن:}$$

(2) ليكن B الحدث "الحصول على بيضاء على الأقل"
ليكن $\bar{B}$ الحدث المضاد ل B .
 $\bar{B}$ يعني الحصول على $(2R, 2R)$

$$p(\bar{B}) = \frac{C_3^2}{C_7^2} \cdot \frac{C_7^2}{C_9^2} = \frac{1}{12} \quad \text{إذن:}$$

$$p(B) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \quad \text{ومنه}$$

(3) ليكن C الحدث "الحصول على كرة بيضاء بالضبط"
الحدث C يعني الحصول على $(2R, \{B, R\})$ أو
 $(\{R, B\}, 2R)$

$$p(C) = \frac{C_3^2}{C_7^2} \cdot \frac{C_7^1}{C_9^1} + \frac{C_4^1}{C_7^1} \cdot \frac{C_6^1}{C_9^1} \quad \text{إذن}$$

$$p(C/A) = \frac{p(A \cap C)}{p(A)} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

ومنه:

تمرين (2):

عائلة لها طفلان.

(1) ما هو الاحتمال لكي يكون الطفلان ذكراين علما أن أكبرهما ذكر؟
(2) ما هو الاحتمال لكي يكون الطفلان ذكراين علما أن أحدهما ذكر؟

نرمز لكل إمكانية بالزوج (x, y) حيث x الطفل الكبير و y
الطفل الصغير.
ليكن Ω كون الإمكانات. لدينا:

$$\Omega = \{(G, G); (G, F); (F, G); (F, F)\}$$

(1) ليكن A الحدث "أكبر الطفلين ذكر".
وليكن B الحدث "الطفلان ذكراين".

الاحتمال المطلوب $p(B/A)$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

$$A = \{(G, G), (G, F)\} \quad \text{لدينا:}$$

$$A \cap B = \{(G, G)\} \quad \text{و}$$

$$p(A) = \frac{2}{4} \quad \text{et} \quad p(A \cap B) = \frac{1}{4} \quad \text{إذن}$$

$$p(B/A) = \frac{1}{2} \quad \text{إذن}$$

(2) ليكن C الحدث "أحد الطفلين ذكر".

الاحتمال المطلوب هو $p(B/C)$

$$p(B/C) = \frac{p(B \cap C)}{p(C)}$$

$$C = \{(G, G), (G, F), (F, G)\} \quad \text{لدينا:}$$

$$B \cap C = \{(G, G)\} \quad \text{و}$$

$$p(C) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad p(B \cap C) = \frac{1}{4} \quad \text{إذن}$$

$$p(B/C) = \frac{1}{3} \quad \text{ومنه}$$

(3) صيغة الاحتمالات المركبة:

خاصية:

ليكن (Ω, p) فضاء احتماليا منتهيا.

ليكن A و B حدثين بحيث $p(A) \neq 0$

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) \quad \text{لدينا:}$$

(4) صيغة الاحتمالات الكلية:

تعريف:

ليكن (Ω, p) فضاء احتماليا منتهيا.

نقول إن الأحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$ أحداثا تكون تجزئيا لـ Ω إذا

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega \quad \text{و فقط إذا كان:}$$

$$\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$

مثال:

A و $\bar{A}$ يكونان تجزئيا لـ Ω .

خاصية (صيغة الاحتمالات الكلية):

ليكن (Ω, p) فضاء احتماليا منتهيا.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ أحداثا تكون تجزئيا لـ Ω

لكل حدث B لدينا:

$$p(B) = p(A_1)p(B/A_1) + p(A_2)p(B/A_2) + \dots + p(A_n)p(B/A_n) \\ = \sum_{i=1}^n p(A_i)p(B/A_i)$$

برهان:

$$B \subset \Omega \quad \text{لدينا}$$

$$B = B \cap \Omega \quad \text{إذن}$$

$$= B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

$$= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$$

ولدينا

$$\forall i \neq j \quad (B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset$$

$$(B \cap A_i) \subset A_i \quad \text{لأن}$$

$$A_i \cap A_j \neq \emptyset \quad \text{و} \quad (A_i \cap A_j) \subset A_i$$

إذن:

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B) \\ = p(A_1)p(B/A_1) + p(A_2)p(B/A_2) + \dots + p(A_n)p(B/A_n)$$

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

نعتبر 3 صناديق U_1, U_2, U_3 بحيث U_1 يحتوي على 2B و $3N$ و U_2 يحتوي على 3B و $4N$ و U_3 يحتوي على 5B و $3N$.

نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة، ونسحب منه تانبا كرتين.

(1) احسب احتمال الحصول على كرتين بيضاوين.

(2) إذا علمنا أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون، فما هو الاحتمال لكي تكونا مسحوبتين من U_3 ؟

الحل

(1) ليكن A الحدث "الحصول على كرتين بيضاوين"

ليكن A_i الحدث "اختيار الصندوق U_i " $i \in \{1, 2, 3\}$

$$p(A_i) = \frac{1}{3} \quad \text{لدينا:}$$

$$= \frac{3}{21} \cdot \frac{2.7}{36} + \frac{4.3}{21} \cdot \frac{15}{36}$$

$$p(C) = \frac{1}{18} + \frac{5}{21}$$

تمرين (2):

صندوق يحتوي على $2N; 3B; 4R$

نسحب بنتابع وبدون إحلالل 3 كرات من الصندوق.

احسب احتمال الحصول على:

(1) 3 كرات بيضاء.

(2) كرة بيضاء بالضبط.

(3) كرة بيضاء على الأقل.

(4) 3 كرات من نفس اللون.

نرمز لكل إمكانية بـ (x, y, z) حيث x نتيجة السحبة (1).

y نتيجة السحبة (2) و z نتيجة السحبة (3).

(1) ليكن A الحدث "الحصول على 3B".

A يعني الحصول على (B, B, B) .

$$p(A) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{84} \quad \text{إذن:}$$

(2) ليكن B الحدث "الحصول على كرة بيضاء بالضبط".

الحدث B يعني الحصول على $(B, \bar{B}, \bar{B})$ أو $(\bar{B}, B, \bar{B})$ أو

$(\bar{B}, \bar{B}, B)$ إذن:

$$p(B) = \left(\frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \right) + \left(\frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \right) + \left(\frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \right) = \frac{15}{28}$$

(3) ليكن C الحدث "الحصول على بيضاء على الأقل".

ليكن $\bar{C}$ الحدث المضاد لـ C .

$\bar{C}$ يعني الحصول على $(\bar{B}, \bar{B}, \bar{B})$.

$$p(\bar{C}) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{21} \quad \text{إذن:}$$

$$p(C) = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21} \quad \text{ومنه:}$$

(4) ليكن D الحدث "الحصول على 3 كرات من نفس اللون"

الحدث D يعني الحصول على (R, R, R) أو (B, B, B)

$$p(D) = \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \right) + \left(\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \right) \quad \text{إذن:}$$

$$p(D) = \frac{5}{84}$$

تعميم:

$$p(A \cap B \cap C \cap D) = p(A)p(B/A)p(C/A \cap B)p(D/A \cap B \cap C)$$

لدينا الأحداث A_3, A_2, A_1 تكون تجزئنا ل Ω . إذن حسب صيغة الاحتمالات الكلية لدينا:

$$p(A) = p(A_1)p(A/A_1) + p(A_2)p(A/A_2) + p(A_3)p(A/A_3) \\ = \frac{1}{3} \cdot \frac{C_2^2}{C_5^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{C_3^2}{C_7^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{C_5^2}{C_8^2}$$

$$p(A) = \frac{1}{5}$$

ملاحظة:

يمكن تطبيق صيغة الاحتمالات الكلية بطريقة غير مباشرة كما يلي:

نرمز لكل إمكانية بالزوج (x, y) حيث x نتيجة اختيار الصندوق و y نتيجة السحب.

ليكن A الحدث "الحصول على $2B$ ".

الحدث A يعني الحصول على $(U_1; 2B)$ أو $(U_2, 2B)$ أو $(U_3, 2B)$.

$$p(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{C_2^2}{C_5^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{C_3^2}{C_7^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{1}{5} \quad \text{إذن}$$

(2) ليكن B الحدث "الكرتان المسحوبتان من نفس اللون" ليكن A_3 الحدث "اختيار الصندوق U_3 ".

الاحتمال المطلوب هو $p(A_3/B)$

$$p(A_3/B) = \frac{p(A_3 \cap B)}{p(B)} \quad \text{لدينا:}$$

ولدينا $(A_3 \cap B)$ يعني الحصول على $(U_3, 2B, 2N)$

$$p(A_3 \cap B) = \frac{1}{3} \left(\frac{C_5^2 + C_3^2}{C_8^2} \right) = \frac{13}{84} \quad \text{إذن:}$$

ولدينا B يعني الحصول على $(U_1, 2B, 2N)$ أو $(U_2, 2B, 2N)$ أو $(U_3, 2B, 2N)$

إذن:

$$p(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{C_2^2 + C_3^2}{C_5^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{C_3^2 + C_4^2}{C_7^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{C_5^2 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{307}{420}$$

$$p(A_3/B) = \frac{65}{307} \quad \text{ومنه:}$$

تمرين (2):

صندوق يحتوي على 3 نرود. النرد A له وجهان يحملان رقما زوجيا و 4 أوجه تحمل أرقاما فردية.

النرد B له 3 أوجه تحمل رقم زوجي و 3 أوجه تحمل رقم فردي.

النرد C له 5 أوجه تحمل رقم زوجي ووجه يحمل رقم فردي.

اخترنا عشوائيا أحد النرود ورميناه فإذا به يعين رقما زوجيا.

ما هو الاحتمال لكي يكون النرد الذي تم رميه هو النرد C ؟

الحل

نرمز لكل إمكانية بالزوج (x, y) حيث x نتيجة اختيار النرد و y نتيجة رمي النرد.

ليكن E الحدث "الحصول على رقم زوجي".

ليكن F الحدث "اختيار النرد C ".

الاحتمال المطلوب هو $p(F/E)$

$$p(F/E) = \frac{p(E \cap F)}{p(E)} \quad \text{لدينا:}$$

ولدينا $(E \cap F)$ يعني: (C, R) .

$$p(E \cap F) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18} \quad \text{إذن:}$$

ولدينا E يعني (A, P) أو (B, P) أو (C, P) .

$$p(E) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{18} \quad \text{إذن}$$

$$p(F/E) = \frac{1}{2} \quad \text{ومنه:}$$

(5) الاستقلالية:

(a) الأحداث المستقلة:

تعريف:

ليكن (Ω, p) فضاء احتماليا منتهيا.

نقول إن الحدثين A و B مستقلين إذا وفقط إذا كان:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

ملاحظة:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \quad \text{لدينا:}$$

$$p(A) \cdot p(B/A) = p(A) \cdot p(B) \quad \text{يعني:}$$

$$p(B/A) = p(B) \quad \text{يعني:}$$

ويعني كذلك:

$$p(A) = p(A/B)$$

إذن يكون الحدثان A و B مستقلين إذا وفقط إذا كان تحقيق أحدهما لا يؤثر على تحقيق الآخر.

تمرين:

نعتبر تلميذين x و y اجتازا اختبارا.

احتمال نجاح التلميذ x هو $\frac{1}{3}$ واحتمال نجاح y هو $\frac{2}{5}$

- (1) احسب احتمال نجاح التلميذين معا.
- (2) احسب احتمال نجاح التلميذ x فقط.
- (3) احسب احتمال نجاح تلميذ واحد فقط.
- (4) احسب احتمال نجاح تلميذ واحد على الأقل.

الحل

(1) ليكن A الحدث "نجاح التلميذ x ".

وليكن B الحدث "نجاح التلميذ y ".

الاحتمال المطلوب هو $p(A \cap B)$

من خلال النص يظهر أن الحدثين A و B مستقلان.

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{2}{15} \quad \text{إذن:}$$

ملاحظة:

يمكن تطبيق صيغة الاستقلالية بطريقة غير مباشرة كما يلي:
نرمز لكل إمكانية بالزوج (a, b) حيث a هي نتيجة x و b نتيجة التلميز y

R يعني نجاح التلميز و $\bar{R}$ عدم نجاحه
(1) ليكن E الحدث " نجاح x و y ".
 E يعني (R, R) .

$$p(E) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15} \quad \text{إذن:}$$

(2) ليكن F الحدث " نجاح التلميز x فقط "
 F يعني $(R, \bar{R})$

$$p(F) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5} \quad \text{إذن:}$$

(3) ليكن G الحدث " نجاح تلميز واحد فقط ".
 G يعني $(R, \bar{R})$ أو $(\bar{R}, R)$

$$p(G) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{5}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{5} \quad \text{إذن:}$$

$p(G) = \frac{7}{15}$
(4) ليكن H الحدث " نجاح تلميز على الأقل "
ليكن $\bar{H}$ الحدث المضاد ل H .
 $\bar{H}$ يعني $(\bar{R}, \bar{R})$

$$p(\bar{H}) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5} \quad \text{إذن:}$$

$$p(H) = 1 - p(\bar{H}) = 1 - \frac{2}{5}$$

$$p(H) = \frac{3}{5}$$

(b) الاختبارات المستقلة:

تعريف:

يمكن لتجربة أن تكون مكونة من اختبار واحد أو من عدة اختبارات، ونقول إن هذه الاختبارات مستقلة إذا كانت نتائج إحداها لا تؤثر على الباقي.

أمثلة:

- (1) إذا رمينا قطعة نقود عدة مرات فإن الاختبارات تكون مستقلة.
- (2) السحب بتتابع وبإحلال يشكل اختبارات مستقلة.
- (3) إذا رمينا نفس النرد عدة مرات تكون الاختبارات مستقلة.
- (4) إذا كانت تجربة تتكرر في نفس الظروف فإن الاختبارات تكون مستقلة.

تمرين:

نرمي نرد وجهه مرقمة من 1 إلى 6، 5 مرات.
احسب احتمال الحصول على مضاعف ل 3 مرتين بالضبط.

- نرمز لكل إمكانية ب $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ حيث x_i هي نتيجة الرمية رقم i .
ليكن A الحدث " الحصول على مضاعف ل 3 في رمية واحدة "

$$p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{لدينا}$$

ليكن B الحدث " الحصول على مضاعف ل 3 مرتين بالضبط "

الحدث B يعني " الحدث A يتحقق مرتين بالضبط "
إذن الحدث B مكون من الخماسيات المكونة من $3\bar{A}$ و $A\bar{A}$
ومن أجل تكوين خماسيات من هذا النوع يكفي اختيار مكانين ما بين 5 أماكن نضع فيها A و $\bar{A}$ في الباقي.

وعدد إمكانيات اختيار مكانين من بين 5 أماكن هو C_5^2
إذن عدد هذه الخماسيات هو C_5^2 .
وا احتمال كل واحد منها هو:

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3$$

$$p(B) = C_5^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 \quad \text{إذن:}$$

$$p(B) = 640$$

خاصية:

نعتبر n اختبار مستقل.
ليكن A حدث احتمال تحقيقه في اختبار واحد هو p ، ولا يتغير خلال الاختبارات.
ليكن B الحدث " الحدث A يتحقق K مرة بالضبط ".
لدينا: $p(B) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

برهان:

نفس الطريقة المتبعة في التمرين السابق.

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

صندوق يحتوي على $2N, 4R, 3B$.
نسحب تائياً 3 كرات من الصندوق ونعيد هذه التجربة 6 مرات مع إرجاع الكرات بعد كل تجربة.
- ما هو احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون 4 مرات بالضبط؟

الحل

- ليكن A الحدث " الحصول على 3 كرات من نفس اللون في سحبة واحدة ".
لدينا: $p(A) = \frac{C_3^3 + C_4^3}{C_9^3} = \frac{5}{84}$

- ليكن B الحدث " الحصول على 3 كرات من نفس اللون 4 مرات بالضبط ".
الحدث B يعني " الحدث A يتحقق 4 مرات ".
إذن:

$$p(B) = C_{10}^6 \left(\frac{2}{5}\right)^6 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right)^4 \quad \text{إذن:}$$

$$p(B) = C_{10}^6 \left(\frac{2}{5}\right)^6 \left(\frac{3}{5}\right)^4$$

تمرين (5):

يحتوي صندوق على 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء.
نسحب كرة واحدة من الصندوق.
* إذا كانت حمراء نسحب تانياً كرتين من بين باقي الكرات.
* إذا كانت خضراء نسحب بمتتابع وبدون إحلال كرتين من بين باقي الكرات.
(1) ما هو عدد الحالات الممكنة؟
(b) احسب احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون.
(2) إذا علمنا أنه حصلنا على كرتين خضراوين بالضبط، فما هو الاحتمال لكي تكون الكرة الأولى المسحوبة خضراء؟

الحل

(1) نرسم لكل إمكانية ب (x, y) حيث x نتيجة السحبة الأولى و y نتيجة السحبة الثانية.
(a) ليكن Ω كون الإمكانات.
الحالات الممكنة مكونة من:
- الحالات التي نحصل فيها على كرة حمراء في السحبة الأولى وعددها هو: $4 \cdot C_6^2 = 4 \times 15 = 60$
- الحالات التي نحصل فيها على كرة خضراء في السحبة الأولى وعددها هو: $3 \times 6 \times 5 = 90$
ومنه:

$$Card \Omega = 150$$

(b) ليكن A الحدث "الحصول على 3 كرات من نفس اللون"
 A يعني الحصول على $(R, 2R)$ أو $(V, (V, V))$
إذن:

$$p(A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{C_3^2}{C_6^2} + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}\right)$$

$$p(A) = \frac{1}{7}$$

(2) ليكن B الحدث "الحصول على 2V بالضبط".
ليكن C الحدث "الكرة الأولى خضراء"
الاحتمال المطلوب هو $p(C/B)$

$$p(C/B) = \frac{p(C \cap B)}{p(B)} \quad \text{لدينا}$$

- لدينا $B \cap C$ يعني $(V, (V, R))$ أو $(V, (R, V))$

$$p(B \cap C) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \quad \text{إذن:}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5}\right) = \frac{8}{35}$$

$$p(B) = C_6^4 p(A)^4 (1 - p(A))^{6-4}$$

$$p(B) = C_6^4 \left(\frac{5}{84}\right)^4 \left(\frac{79}{84}\right)^2$$

تمرين (2):

صندوق يحتوي على $2N, 4R, 3B$
نسحب بمتتابع وبإحلال 6 كرات من الصندوق.
ما هو احتمال الحصول على كرة حمراء مرتين بالضبط؟
الحل
ليكن A الحدث "الحصول على كرة حمراء في سحبة واحدة"
لدينا: $p(A) = \frac{4}{9}$

ليكن B الحدث "الحصول على كرة حمراء مرتين بالضبط"
 B يعني "الحدث A يتحقق مرتين بالضبط".

$$p(B) = C_6^2 p(A)^2 (1 - p(A))^{6-2} \quad \text{إذن:}$$

$$p(B) = C_6^2 \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{5}{9}\right)^4$$

تمرين (3):

رام يتمرّن على إصابة هدف.
احتمال إصابة الهدف في طلقة واحدة هو: $p = \frac{2}{3}$
ما هو احتمال إصابة الهدف 6 مرات بعد 20 طلقة؟
الحل
ليكن A الحدث "إصابة الهدف في طلقة واحدة".
لدينا: $p(A) = \frac{2}{3}$

ليكن B الحدث "إصابة الهدف 6 مرات".
 B يعني "الحدث A يتحقق 6 مرات بالضبط".

$$p(B) = C_{20}^6 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{14} \quad \text{إذن}$$

$$p(B) = C_{20}^6 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^{14}$$

تمرين (4):

يقوم مراقب بزيارة تجار في مدينة، وعددهم 20.
في كل زيارة الاحتمال لكي يجد المراقب التاجر موجودا هو $p = \frac{2}{5}$

قام المراقب ب 10 زيارات. ما هو الاحتمال لكي يكون المراقب قد وجد 6 تجار.

الحل

ليكن A الحدث "المراقب يجد التاجر في زيارة واحدة"
لدينا: $p(A) = \frac{2}{5}$

ليكن B الحدث "المراقب يجد 6 تجار في الزيارات العشر"
 B يعني "الحدث A يتحقق 6 مرات بالضبط"

- الحدث B يعني $(V, (V, R))$ أو $(V, (R, V))$ أو $(R, \{2V\})$.

$$p(B) = \frac{8}{35} + \frac{4}{7} \cdot \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{12}{35} \quad \text{إذن:}$$

$$p(C/B) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad \text{ومنه:}$$